Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет
Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Никулин Д. А.

Вычисление когомологий Хохшильда для некоторой алгебры полудиэдрального типа

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Генералов А. И.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Косовская Н. Ю.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics and Mechanics Faculty
Algebra and Number Theory Department

Dmitry Nikulin

Computation of Hochschild cohomology for a certain algebra of semidihedral type

Graduation Project

Scientific supervisor:
Dr. of Phys. and Math., Professor Alexander Generalov

Reviewer:
Math. PhD, Nadezhda Kosovskaya

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

1. Введение **4**

2. Основные определения **5**

3. Построение резольвенты **6**

4. Группы когомологий **9**

4.1. Обозначения . . . 9

4.2. δ^0 . . . 9

4.3. δ^1 . . . 10

4.3.1. $\operatorname{Ker}\delta^1$ . . . 11

4.3.2. $\operatorname{Im}\delta^1$ . . . 12

4.3.3. $\mathrm{HH}^1(R)$ . . . 13

4.4. δ^2 . . . 13

4.4.1. $\operatorname{Ker}\delta^2$ . . . 14

4.4.2. $\operatorname{Im}\delta^2$ . . . 15

4.4.3. $\mathrm{HH}^2(R)$ . . . 15

4.5. δ^3 . . . 17

4.5.1. $\operatorname{Ker}\delta^3$ . . . 18

4.5.2. $\operatorname{Im}\delta^3$ . . . 19

4.5.3. $\mathrm{HH}^3(R)$ . . . 19

4.6. $\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ . . . 20

4.6.1. $\operatorname{Ker}\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ . . . 21

4.6.2. $\operatorname{Im}\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ . . . 21

4.7. $\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ . . . 22

4.8. $H^n(\mathcal{X}^\bullet)$ . . . 22

4.9. $\mathrm{HH}^n(R)$ . . . 22

5. Заключение **25**

Список литературы **26**

1. Введение

Алгебры полудиэдрального типа, введённые К. Эрдманн в работах [1, 2] (см. также [3]), являются естественным обобщением групповых блоков с полудиэдральной дефектной группой. Они, наряду с алгебрами диэдрального и кватернионного типов, возникли при классификации блоков, имеющих ручной тип представления. Производной эквивалентностью алгебр называется эквивалентность производных категорий как триангулированных категорий, построенных по категориям ограниченных комплексов модулей над этими алгебрами. Группы когомологий Хохшильда являются инвариантом относительно этой эквивалентности, поэтому знание этих групп для конкретных алгебр иногда позволяет выяснить, что эти алгебры не эквивалентны. В работе строятся бимодульные резольвенты для некоторой серии алгебр данного типа с последующим их использованием для вычисления групп когомологий Хохшильда.

2. Основные определения

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $c, d \in \mathbb{K}$, c и d одновременно не равны 0; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Алгебры $R = SD(1\mathcal{A})^{k,2}(c,d)$ определяются как факторалгебры алгебры многочленов $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ со следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= y(xy)^{k-1} + c(xy)^k,\\
y^2 &= d(xy)^k,\\
(xy)^k &= (yx)^k,\\
x(yx)^k &= 0.
\end{aligned}
$$

Отметим, что $\dim R = 4k$, и будем называть стандартным базисом алгебры R следующий набор из $4k$ элементов:

$$\left\{1, \left\{y(xy)^i, x(yx)^i\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{(xy)^i, (yx)^i\right\}_{i=1}^{k-1}, (xy)^k\right\}. \tag{1}$$

Через $\Lambda = R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$ обозначим обёртывающую алгебру R. Напомним, что умножение в обёртывающей алгебре определяется на мономах следующим образом:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac \otimes db).$$

На произвольных элементах Λ умножение определяется по дистрибутивности.

Как и во всех предыдущих работах, мы будем рассматривать Λ как *правый* Λ-модуль. Отметим, что умножение справа на элемент $\omega \in \Lambda$ индуцирует гомоморфизм $\omega^* \colon \Lambda \to \Lambda$. В дальнейшем мы будем записывать ω^* просто как ω.

3. Построение резольвенты

При построении резольвенты будем опираться на работы [7] и [8]. В [7] проводится вычисление бимодульной резольвенты для алгебры, отличающейся от рассматриваемой здесь тем, что в ней $c, d = 0$. В [8] вычисляется минимальная проективная резольвента для единственного простого модуля над алгеброй, рассматриваемой в данной работе. Знание бимодульной резольвенты даст возможность вычислять только «невязку», вызванную ненулевыми c и d. Знание проективной резольвенты позволит использовать теорему, доказанную в [11], и не проверять точность комплекса напрямую.

Будем пользоваться обозначениями из [7]:

$$
\begin{aligned}
Y &= y \otimes 1 + 1 \otimes y, \\
X &= x \otimes 1 + 1 \otimes x, \\
\varphi_1 &= \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}, \\
\varphi_2 &= X + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\rho &= x(yx)^{k-1} \otimes 1 + 1 \otimes x(yx)^{k-1}, \\
\psi &= (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}, \\
\tau &= Y \cdot X, \\
\sigma &= X \cdot \varphi_1,
\end{aligned}
$$

а также введём следующие вспомогательные обозначения:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}, \\
\mu &= \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i}, \\
\omega &= \left((1+cx)(yx)^{k-1}\right) \otimes (xy)^k \\
A &= c^2 d \cdot \omega, \\
B &= d \cdot ((1+cx) \otimes y) \cdot X, \\
C &= c^2 \cdot \left(y(xy)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1}\right) \\
&\quad + c^3 \left(x\,(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k\right), \\
D &= c \cdot Y \cdot (x \otimes x) \\
&\quad + c \cdot \left(x^2 \otimes y\right) \\
&\quad + d \cdot \left(x(yx)^{k-1} \otimes x\right),
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
E &= d\left(x(yx)^{k-1} \otimes 1\right) + c^2 d \cdot \omega, \\
F &= d\,(1 \otimes y), \\
G &= c^2 \cdot \omega, \\
H &= c \cdot \left(y\,(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}\right), \\
I &= c^3 d \left(x\,(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k\right), \\
J &= c^3 \left(x\,(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k\right), \\
K &= d\left(x\,(yx)^{k-1} \otimes 1\right), \\
L &= c\left((yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1}\right), \\
M &= d\left(x\,(yx)^{k-1} \otimes 1\right) \\
&\quad + c^3 d\left(x\,(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k\right).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим следующий набор $B_{\bullet\bullet}$ из Λ-модулей и гомоморфизмов между ними:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \vdots \arrow[d, dashed] & & & & \\
 & & & \Lambda \arrow[d, swap, "\left(\begin{smallmatrix}\varphi_1+c\lambda\\ \varphi_2+c\mu\end{smallmatrix}\right)"] & \Lambda \arrow[l, "\tau+D"] \arrow[d, "\rho+C"] & \cdots \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] & & & \\
 & & \Lambda \arrow[d, "\sigma+H"] & \Lambda^2 \arrow[l, swap, "{(Y,X)}"] \arrow[d, "{(\rho,\psi+L)}"] & \Lambda \arrow[l, swap, "\left(\begin{smallmatrix}Y+d\lambda\\ d\mu\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\rho"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+A"] \arrow[d, "\rho"] \arrow[ull, "B"] & \cdots \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[ull, dashed] & & \\
 & \Lambda \arrow[d, swap, "\left(\begin{smallmatrix}\varphi_1+c\lambda\\ \varphi_2+c\mu\end{smallmatrix}\right)"] & \Lambda \arrow[l, "\tau+D"] \arrow[d, "\rho+C"] & \Lambda \arrow[l, "Y"] \arrow[d, "\rho+G"] & \Lambda \arrow[l, "Y+K"] \arrow[d, "\rho+J"] & \Lambda \arrow[l, "Y"] \arrow[d, "\rho+J"] & \Lambda \arrow[l, "Y+K"] \arrow[d, "\rho+J"] & \cdots \arrow[l, dashed] & \\
\Lambda & \Lambda^2 \arrow[l, swap, "{(Y,X)}"] & \Lambda \arrow[l, swap, "\left(\begin{smallmatrix}Y+d\lambda\\ d\mu\end{smallmatrix}\right)"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+A"] \arrow[ull, "B"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+E"] \arrow[ull, "F"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+I"] \arrow[ull, "F"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+M"] \arrow[ull, "F"] & \Lambda \arrow[l, swap, "Y+I"] \arrow[ull, "F"] & \cdots \arrow[l, dashed] \arrow[ull, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Строго говоря, этот набор не является бикомплексом, однако для него очевидным образом можно определить операцию тотализации и, таким образом, он является удобным описанием для резольвенты $Q_\bullet = (\operatorname{Tot} B_{\bullet\bullet} \to R)$:

$$
\cdots \longrightarrow \Lambda^4 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \rho & 0 & 0\\ 0 & Y & \rho & 0\\ 0 & 0 & Y & \rho\\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} I & J & 0 & 0\\ F & K & 0 & 0\\ 0 & 0 & A & C\\ 0 & 0 & B & D \end{smallmatrix}\right)} \Lambda^4 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \rho & 0 & 0\\ 0 & Y & \rho & 0\\ 0 & 0 & Y & \phi_1\\ 0 & 0 & 0 & \phi_2 \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} M & J & 0 & 0\\ F & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d\lambda & c\lambda\\ 0 & 0 & d\mu & c\mu \end{smallmatrix}\right)}
$$

$$
\Lambda^4 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \rho & 0 & 0\\ 0 & Y & \rho & \psi\\ 0 & 0 & Y & X \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} I & J & 0 & 0\\ F & K & 0 & L\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \Lambda^3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \rho & 0\\ 0 & Y & \sigma \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} E & G & 0\\ F & 0 & H \end{smallmatrix}\right)}
$$

$$
\Lambda^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \rho\\ 0 & \tau \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} A & C\\ B & D \end{smallmatrix}\right)} \Lambda^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} Y & \varphi_1\\ 0 & \varphi_2 \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} d\lambda & c\lambda\\ d\mu & c\mu \end{smallmatrix}\right)} \Lambda^2 \xrightarrow{(Y\ X)} \Lambda \xrightarrow{a\otimes b \to ab} R \longrightarrow 0.
$$

Иными словами, при $0 \le n \le 4$ матрицы d_n выписываются явно, а при $n \ge 5$ они имеют следующий блочный вид:

$$
\begin{array}{cc}
d_n \text{ при } n \equiv 0 \pmod 2 & d_n \text{ при } n \equiv 1 \pmod 2 \\
\left(\begin{array}{cc|c|c}
Y+I & \rho+J & 0 & 0 \\
F & Y+K & \rho & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{d_{n-4}}
\end{array}\right)
&
\left(\begin{array}{cc|c|c}
Y+M & \rho+J & 0 & 0 \\
F & Y & \rho & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{d_{n-4}}
\end{array}\right)
\end{array}
\tag{2}
$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что $d_n d_{n+1} = 0$ при $0 \le n \le 4$, а при $n \ge 5$ достаточно применить индукцию. Установив таким образом тот факт, что $Q_\bullet$ является комплексом, обратимся к теореме 1 из [11]. Для того, чтобы ей воспользоваться в данном случае, необходимо, чтобы образ $Q_\bullet$ под действием функтора $- \otimes_R S$

(где S — это единственный простой R-модуль) был минимальной проективной резольвентой S. Однако эта резольвента построена в [8], и несложно убедиться, что это условие действительно выполняется. Отсюда мы заключаем, что $Q_\bullet$ является минимальной бимодульной резольвентой алгебры R.

В заключение этого раздела отметим, что ручное вычисление резольвенты весьма трудоёмко, и для его упрощения была написана программа на языке Python с использованием библиотеки `sympy` [6]. Программа выполняла упрощение выражений, содержащих арифметические операции, суммы и тензорные произведения. Код программы доступен в [9].

4. Группы когомологий

4.1. Обозначения

Для вычисления когомологий Хохшильда мы будем следовать определению

$$\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)\right),$$

где $Q_\bullet$ — это бимодульная резольвента, построенная в предыдущей части.

Будем обозначать объекты и дифференциалы в комплексе $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$ следующим образом:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \left\{Q^n = \mathrm{Hom}_\Lambda\left(Q_n, R\right), \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda\left(d_n, R\right)\right\}_{n=0}^\infty,$$

где Q_n и d_n — соответственно объекты и дифференциалы комплекса $Q_\bullet$.

Всякий Λ-гомоморфизм из Λ в R определяется своим значением на $1\otimes 1$, а всякий Λ-гомоморфизм из Λ^n в R определяется своими сужениями на прямые слагаемые, поэтому можно отождествить $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^n, R)$ и R^n. При таком представлении дифференциалы δ^n описываются транспонированными матрицами дифференциалов d_n. Также будем обозначать действие Λ на R символом $*\colon (\Lambda, R)\to R$. Напомним, что отображение $*$ является $\mathbb{K}$-билинейным, а также что $(a\otimes b)*r = arb$.

4.2. δ^0

Выпишем явно действие δ^0 на элемент $r\in R$:

$$\begin{cases}\delta^0(r)_1 = Y * r,\\ \delta^0(r)_2 = X * r.\end{cases} \tag{3}$$

Рассматривая действие Y и X на элементы стандартного базиса, видим, что оно не отличается от случая $c, d = 0$. Отсюда заключаем, что $\mathrm{Ker}\,\delta^0$, $\mathrm{Im}\,\delta^0$ и $\mathrm{HH}^0(R)$ также сохраняются. Для удобства воспроизведём здесь результаты из [7].

$\dim_\mathbb{K}\mathrm{Im}\,\delta^0 = 3k-3$. $\mathbb{K}$-базис $\mathrm{Im}\,\delta^0$:

$$\begin{aligned}&\left(y(xy)^i, x(yx)^i\right), \quad i = 1\dots k-1,\\ &\left((xy)^i + (yx)^i, 0\right), \quad i = 1\dots k-1,\\ &\left(0, (xy)^i + (yx)^i\right), \quad i = 1\dots k-1.\end{aligned} \tag{4}$$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{HH}^0(R) = k+3$. $\mathbb{K}$-базис $\mathrm{HH}^0(R)$:

$$\begin{aligned} &1, \\ x(yx)^{k-1}&, \\ y(xy)^{k-1}&, \\ (xy)^i + (yx)^i&, \quad i = 1 \dots k-1, \\ (xy)^k&. \end{aligned} \tag{5}$$

4.3. δ^1

Вновь выпишем явно действие δ^1 на элемент $(r_1, r_2) \in R^2$:

$$\begin{cases} \delta^1(r_1, r_2)_1 = (Y + d\lambda) * r_1 + (d\mu) * r_2, \\ \delta^1(r_1, r_2)_2 = (\phi_1 + c\lambda) * r_1 + (\phi_2 + c\mu) * r_2. \end{cases} \tag{6}$$

Для произвольного элемента $r \in R$ введём обозначения для его разложения по стандартному базису с коэффициентами $\alpha_\star \in \mathbb{K}$:

$$r = \alpha_1 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{y(xy)^i} y(xy)^i + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{x(yx)^i} x(yx)^i + \\ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{(xy)^i} (xy)^i + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{(yx)^i} (yx)^i + \alpha_{(xy)^k} (xy)^k.$$

Теперь, подставляя разложение по базису r_1 с коэффициентами $\alpha_\star$ и r_2 с коэффициентами $\beta_\star$ в систему 6, получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases}\delta^1(r_1,r_2)_1 = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_{x(yx)^i}\left((xy)^{i+1}+(yx)^{i+1}\right)\\ \qquad + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\alpha_{(xy)^i}+\alpha_{(yx)^i}\right) y(xy)^i\\ \qquad + d\left(\alpha_1 x(yx)^{k-1} + \alpha_y\left[k \bmod 2\right](xy)^k\right)\\ \qquad + d\left(\beta_1 y(xy)^{k-1} + \beta_x[k \bmod 2](xy)^k\right),\\ \delta^1(r_1,r_2)_2 = \alpha_1\left((xy)^{k-1}+(yx)^{k-1}\right) + \alpha_y[k \bmod 2] y(xy)^{k-1}\\ \qquad + \left(\alpha_{xy}+\alpha_{yx}\right)(xy)^k\\ \qquad + c\left(\alpha_1 x(yx)^{k-1} + \alpha_y[k \bmod 2](xy)^k\right)\\ \qquad + \sum_{i=0}^{k-2}\beta_{y(xy)^i}\left((xy)^{i+1}+(yx)^{i+1}\right)\\ \qquad + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\beta_{(xy)^i}+\beta_{(yx)^i}\right)x(yx)^i\\ \qquad + \beta_x\left[(k-1) \bmod 2\right] y(xy)^{k-1}\\ \qquad + c\left(\beta_1 y(xy)^{k-1} + \beta_x[k \bmod 2](xy)^k\right).\end{cases} \tag{7}$$

4.3.1. $\operatorname{Ker}\delta^1$

Для вычисления размерности и базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$ приравняем оба уравнения в 7 к нулю. Из полученной системы будет следовать следующая система уравнений:

$$\begin{cases}\begin{cases}\alpha_{x(yx)^i} = 0, & i = 0\dots k-2,\\ \alpha_{(xy)^i}+\alpha_{(yx)^i} = 0, & i = 1\dots k-2,\\ \alpha_{(xy)^{k-1}}+\alpha_{(yx)^{k-1}} + d\beta_1 = 0, & \\ d\alpha_1 = 0, & \\ d\left[k \bmod 2\right](\alpha_y+\beta_x) = 0, & \end{cases}\\ \begin{cases}\beta_{(xy)^i}+\beta_{(yx)^i} = 0, & i = 1\dots k-2,\\ \beta_{(xy)^{k-1}}+\beta_{(yx)^{k-1}} + c\alpha_1 = 0, & \\ \beta_{y(xy)^i} = 0, & i = 0\dots k-3,\\ \alpha_1 + \beta_{y(xy)^{k-2}} = 0, & \\ \left[k \bmod 2\right]\alpha_y + \left[(k-1) \bmod 2\right]\beta_x + c\beta_1 = 0, & \\ \alpha_{xy}+\alpha_{yx} + c\left[k \bmod 2\right](\alpha_y+\beta_x) = 0, & \end{cases}\end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим следующее семейство из $4k$ векторов в R^2:

$$\begin{aligned} \big(y(xy)^i, 0\big)\,, &\quad i = 1\dots k-1, \\ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big)\,, & \\ \big((xy)^i + (yx)^i, 0\big)\,, &\quad i = 1\dots k-1, \\ \big((xy)^k, 0\big)\,, & \\ \big(0, y(xy)^{k-1}\big)\,, & \\ \big(0, x(yx)^i\big)\,, &\quad i = 1\dots k-1, \\ \big(0, (xy)^i + (yx)^i\big)\,, &\quad i = 1\dots k-1, \\ \big(0, (xy)^k\big)\,. & \end{aligned} \tag{9}$$

В следующей таблице перечислено, какие векторы нужно добавить к этому семейству, чтобы получить $\mathbb{K}$-базис $\operatorname{Ker}\delta^1$ в каждом из четырёх случаев:

	$[k \bmod 2] = 0$	$[k \bmod 2] = 1$
$d \neq 0$	$\big(d(xy)^{k-1}, 1 + cx\big)$ $(y, 0)$	$\big(d(xy)^{k-1} + cy, 1 + cx\big)$
$d = 0$	$\big(1, c(xy)^{k-1} + y(xy)^{k-2}\big)$ $(y, 0)$ $(0, 1 + cx)$	$\big(1, c(xy)^{k-1} + y(xy)^{k-2}\big)$ $(cy, 1 + cx)$

Таблица 1: $\mathbb{K}$-базис $\operatorname{Ker}\delta^1$

Здесь стоит заметить, что случай $[k \bmod 2] = 1$, $d = 0$ при замене $c = 0$ не вырождается в случай, описанный в [7]. Это объясняется эффектом последнего уравнения в первой системе и последних двух уравнений во второй системе в 8.

Размерность $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\delta^1$ в разных случаях представлена в следующей таблице:

	$[k \bmod 2] = 0$	$[k \bmod 2] = 1$
$d \neq 0$	$4k + 2$	$4k + 1$
$d = 0$	$4k + 3$	$4k + 2$

Таблица 2: $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\delta^1$

4.3.2. $\operatorname{Im}\delta^1$

Вновь рассматривая систему 7, выписываем $\mathbb{K}$-базис $\operatorname{Im}\delta^1$, а также примеры векторов из R^2, являющихся прообразами векторов в базисе:

$$
\begin{aligned}
\left(x(yx)^{i-1},0\right) &\to \left((xy)^i+(yx)^i,0\right), && i=1\dots k-1,\\
(xy,0) &\to \left(yxy,(xy)^k\right),\\
\left((xy)^i,0\right) &\to \left(y(xy)^i,0\right), && i=2\dots k-1,\\
\left(1,y(xy)^{k-2}+c(xy)^{k-1}\right) &\to \left(dx(yx)^{k-1},0\right),\\
(y,0)+[k \bmod 2](y,x) &\to [k \bmod 2]\left(d(xy)^k,c(xy)^k\right),\\
(y,x) &\to \left(0,y(xy)^{k-1}\right),\\
\left(0,y(xy)^{i-1}\right) &\to \left(0,(xy)^i+(yx)^i\right), && i=1\dots k-1,\\
\left(0,(xy)^i\right) &\to \left(0,x(yx)^i\right), && i=1\dots k-1.
\end{aligned}
$$

Размерность $\operatorname{Im}\delta^1$ в разных случаях приведена в следующей таблице:

	$[k \bmod 2]=0$	$[k \bmod 2]=1$
$d\neq 0$	$4k-2$	$4k-1$
$d=0$	$4k-3$	$4k-2$

Таблица 3: $\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im}\delta^1$

4.3.3. $\mathrm{HH}^1(R)$

Вернёмся к базису $\operatorname{Im}\delta^0$ (4) и исключим векторы оттуда из набора векторов, образующих базис $\operatorname{Ker}\delta^1$ (9). В результате получим набор векторов, чьи когомологические классы образуют базис $\mathrm{HH}^1(R)$. Отсюда находим размерность $\mathrm{HH}^1(R)$:

	$[k \bmod 2]=0$	$[k \bmod 2]=1$
$d\neq 0$	$k+5$	$k+4$
$d=0$	$k+6$	$k+5$

Таблица 4: $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{HH}^1(R)$

4.4. δ^2

Рассмотрим систему, аналогичную 6:

$$
\begin{cases}
\delta^2(r_1,r_2)_1=(Y+A)*r_1+B*r_2,\\
\delta^2(r_1,r_2)_2=(\rho+C)*r_1+(\tau+D)*r_2.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Подставим в неё разложение r_1 и r_2 по базису, получим:

$$\begin{cases} \delta^2(r_1,r_2)_1 = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_{x(yx)^i} \left((xy)^{i+1} + (yx)^{i+1}\right) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha_{(xy)^i} + \alpha_{(yx)^i}\right) y(xy)^i \\ \qquad + \sum_{i=0}^{k-2} \beta_{y(xy)^i} d \left(y(xy)^{i+1} + c(xy)^{i+2}\right) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i}\right) d(xy)^{i+1} \\ \delta^2(r_1,r_2)_2 = \sum_{i=1}^{k-2} \left(\beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i}\right) \left((xy)^{i+1} + (yx)^{i+1}\right) \\ \qquad + \sum_{i=0}^{k-3} \beta_{y(xy)^i} c \left((xy)^{i+2} + (yx)^{i+2}\right) \end{cases} \tag{11}$$

4.4.1. $\operatorname{Ker} \delta^2$

Приравняем оба уравнения в 11 к нулю:

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha_{x(yx)^i} = 0, & i = 0 \dots k-2, \\ d\beta_{y(xy)^{i-1}} + \alpha_{(xy)^i} + \alpha_{(yx)^i} = 0, & i = 1 \dots k-1, \\ d\left(c\beta_{y(xy)^{k-2}} + \beta_{(xy)^{k-1}} + \beta_{(yx)^{k-1}}\right) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} c\beta_{y(xy)^{i-1}} + \beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i} = 0, & i = 1 \dots k-2. \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим следующее семейство из $4k+3$ векторов в R^2:

$$\begin{aligned} &(1,0)\,, \\ &\left(y(xy)^i, 0\right), \quad i = 0 \dots k-1, \\ &\left(x(yx)^{k-1}, 0\right), \\ &\left((xy)^i + (yx)^i, 0\right), \quad i = 1 \dots k-1, \\ &\left((xy)^k, 0\right), \\ &(0,1)\,, \\ &\left(0, y(xy)^{k-1}\right), \\ &\left(0, x(yx)^i\right), \quad i = 0 \dots k-1, \\ &\left(0, (xy)^i + (yx)^i\right), \quad i = 1 \dots k-2, \\ &\left(0, (xy)^k\right). \end{aligned} \tag{13}$$

В следующей таблице перечислено, какие векторы нужно добавить к этому семейству, чтобы получить $\mathbb{K}$-базис $\operatorname{Ker}\delta^2$ в каждом из двух случаев:

$d \neq 0$	$\left(d(xy)^i, y(xy)^{i-1} + c(xy)^i\right), \quad i = 1 \dots k-1$ $\left(0, (xy)^{k-1} + (yx)^{k-1}\right)$
$d = 0$	$\left(0, y(xy)^{i-1} + c(xy)^i\right), \quad i = 1 \dots k-2$ $\left(0, y(xy)^{k-2}\right)$ $\left(0, (xy)^{k-1}\right)$ $\left(0, (yx)^{k-1}\right)$

Таблица 5: $\operatorname{Ker}\delta^2$

При $d \neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\delta^2 = 5k+3$, в противном случае $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\delta^2 = 5k+4$.

4.4.2. $\operatorname{Im}\delta^2$

Вновь рассмотрим систему 11 и выпишем $\mathbb{K}$-базис $\operatorname{Im}\delta^2$:

$$\begin{aligned}
\left(x(yx)^{i-1}, 0\right) &\to \left((xy)^i + (yx)^i, 0\right), && i = 1 \dots k-1,\\
\left((xy)^i, 0\right) &\to \left(y(xy)^i, 0\right), && i = 1 \dots k-1,\\
\left(0, (xy)^{i-1}\right) &\to \left(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i\right), && i = 2 \dots k-1,\\
\left(0, (xy)^{k-1}\right) &\to \left(d(xy)^k, 0\right).
\end{aligned}$$

При $d \neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}\delta^2 = 3k-3$, а при $d = 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\delta^2 = 3k-4$.

4.4.3. $\mathrm{HH}^2(R)$

Преобразуем базис $\operatorname{Ker}\delta^2$:

$$
\begin{aligned}
&(1,0)\,, \\
&(y,0)\,, \\
&\big(yxy,(xy)^k\big)\,, \\
&\big(y(xy)^i,0\big)\,, \quad i=2\dots k-1, \\
&\big(x(yx)^{k-1},0\big)\,, \\
&\big((xy)^i+(yx)^i,0\big)\,, \quad i=1\dots k-1, \\
&\big((xy)^k,0\big)\,, \\
&(0,1)\,, \\
&\big(0,y(xy)^{k-1}\big)\,, \\
&(0,x)\,, \\
&\big(0,x(yx)^i\big)\,, \quad i=1\dots k-1, \\
&\big(0,(xy)^i+(yx)^i\big)\,, \quad i=1\dots k-1, \\
&\big(0,(xy)^k\big)\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$d\neq 0$	$(d(xy)^i, y(xy)^{i-1}+c(xy)^i)\,, \quad i=1\dots k-1$
$d=0$	$(0, y(xy)^{i-1}+c(xy)^i)\,, \quad i=1\dots k-2$ $\big(0,y(xy)^{k-2}\big)$ $\big(0,(yx)^{k-1}\big)$

Таблица 6: эквивалентный базис $\operatorname{Ker}\delta^2$

В таком виде удобно проводить вычисление базиса $\mathrm{HH}^2(R)$. Для его описания рассмотрим семейство векторов

$$
\begin{aligned}
&(1,0)\,, \\
&(y,0)\,, \\
&(0,1)\,, \\
&(0,x)\,.
\end{aligned}
$$

В каждом из четырёх случаев добавим к этому семейству следующие векторы:

	$[k \bmod 2] = 0$	$[k \bmod 2] = 1$
$d \neq 0$	$\big((xy)^k, 0\big)$ $\big(0, (xy)^k\big)$	$\big(0, (xy)^k\big)$
$d = 0$	$\big(x(yx)^{k-1}, 0\big)$ $\big((xy)^k, 0\big)$ $\big(0, (xy)^k\big)$	$\big(x(yx)^{k-1}, 0\big)$ $\big((xy)^k, 0\big)$

Таблица 7: $\mathrm{HH}^2(R)$

Вернёмся к таблице 6 и добавим указанные там элементы к получившимся семействам в соответствующих случаях. Таким образом, в каждом случае мы получили семейство векторов, чьи когомологические классы являются $\mathbb{K}$-базисом $\mathrm{HH}^2(R)$. Его размерность:

	$[k \bmod 2] = 0$	$[k \bmod 2] = 1$
$d \neq 0$	$k+5$	$k+4$
$d = 0$	$k+7$	$k+6$

Таблица 8: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{HH}^2(R)$

4.5. δ^3

Рассматриваем систему, аналогичную 6:

$$\begin{cases} \delta^3(r_1, r_2)_1 = (Y + E) * r_1 + F * r_2, \\ \delta^3(r_1, r_2)_2 = (\rho + G) * r_1 + Y * r_2, \\ \delta^3(r_1, r_2)_3 = (\sigma + H) * r_2. \end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что $\forall r \in R$: $(\sigma + H) * r = 0$. С учётом этого подставим в систему 15 разложения $r_{1,2}$ по базису:

$$\begin{cases} \delta^3(r_1,r_2)_1 = \sum\limits_{i=0}^{k-2}\left(\alpha_{x(yx)^i} + d\beta_{x(yx)^i}\right)(xy)^{i+1} \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i=0}^{k-2}\alpha_{x(yx)^i}(yx)^{i+1} \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\alpha_{(xy)^i} + \alpha_{(yx)^i} + d\beta_{(yx)^i}\right)y(xy)^i \\ \qquad\qquad + d\left(\alpha_1 x(yx)^{k-1} + \left(\beta_{x(yx)^{k-1}} + \alpha_y + d\beta_y\right)(xy)^k + \beta_1 y\right) \\ \delta^3(r_1,r_2)_2 = \sum\limits_{i=0}^{k-2}\beta_{x(yx)^i}\left((xy)^{i+1} + (yx)^{i+1}\right) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i}\right)y(xy)^i \end{cases} \tag{16}$$

4.5.1. $\operatorname{Ker}\delta^3$

Приравняем оба уравнения в 16 к нулю, получим:

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha_{x(yx)^i} = 0, & i = 0\dots k-2, \\ \alpha_{(xy)^i} + \alpha_{(yx)^i} + d\beta_{(yx)^i} = 0, & i = 1\dots k-1, \\ d\alpha_1 = 0, \\ d\left(\beta_{x(yx)^{k-1}} + \alpha_y + d\beta_y\right) = 0, \\ d\beta_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \beta_{x(yx)^i} = 0, & i = 0\dots k-2, \\ \beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i} = 0, & i = 1\dots k-1. \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

Случай $d = 0$ разобран в [7]. В случае $d \neq 0$ базис $\operatorname{Ker}\delta^3$ задаётся следующими векторами:

$$
\begin{aligned}
\big(y, x(yx)^{k-1}\big)\,, & \\
(dy, y)\,, & \\
\big(y(xy)^i, 0\big)\,, & \quad i = 1\dots k-1, \\
\big(x(yx)^{k-1}, 0\big)\,, & \\
\big((xy)^i + (yx)^i, 0\big)\,, & \quad i = 1\dots k-1, \\
\big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i\big)\,, & \quad i = 1\dots k-1, \\
\big((xy)^k, 0\big)\,, & \\
\big(0, y(xy)^i\big)\,, & \quad i = 1\dots k-1, \\
\big(0, (xy)^k\big)\,. &
\end{aligned}
\tag{18}
$$

При $d \neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \delta^3 = 4k+1$, а при $d = 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \delta^3 = 4k+4$.

4.5.2. $\operatorname{Im} \delta^3$

Случай $d = 0$ разобран в [7]. В случае $d \neq 0$ базис $\operatorname{Im} \delta^3$ задаётся следующими векторами:

$$
\begin{aligned}
\big(x(yx)^{i-1}, 0\big) &\to \big((xy)^i + (yx)^i, 0, 0\big)\,, && i = 1\dots k-1, \\
\big(0, x(yx)^{i-1}\big) &\to \big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i, 0\big)\,, && i = 1\dots k-1, \\
\big((xy)^i, 0\big) &\to \big(y(xy)^i, 0, 0\big)\,, && i = 1\dots k-1, \\
(1, 0) &\to \big(dx(yx)^{k-1}, 0, 0\big)\,, && \\
(y, 0) &\to \big(d(xy)^k, 0, 0\big)\,, && \\
(0, 1) &\to (dy, 0, 0)\,, && \\
\big(0, (xy)^i\big) &\to \big(0, y(xy)^i, 0\big)\,, && i = 1\dots k-1.
\end{aligned}
$$

При $d \neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \delta^3 = 4k-1$, а при $d = 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \delta^3 = 4k-4$.

4.5.3. $\mathrm{HH}^3(R)$

Вновь случай $d = 0$ разобран в [7]. В случае $d \neq 0$ базис $\mathrm{HH}^3(R)$ задаётся когомологичесими классами векторов следующего семейства:

$$
\begin{aligned}
\left(y, x(yx)^{k-1}\right), & \\
(dy, y), & \\
\left(x(yx)^{k-1}, 0\right), & \\
(dxy, xy+yx), & \\
\left(0, y(xy)^i\right), & \quad i = 1\ldots k-1, \\
\left(0, (xy)^k\right). &
\end{aligned}
\tag{19}
$$

При $d \neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{HH}^3(R) = k+4$, а при $d = 0$ $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{HH}^3(R) = k+8$.

4.6. $\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$

Следуя обозначениям из [7], рассмотрим вспомогательный коцепной комплекс $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ — это комплекс, получаемый тотализацией первых двух строк в 3, и вычислим для $\mathcal{X}^\bullet$ когомологии, начиная с четвёртой. После этого (в разделе 4.9) с минимальными изменениями повторим рассуждение из [7] и получим удобное рекуррентное описание $\mathrm{HH}^n(R)$.

Заметим, что при $s \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2) &= (Y * r_1 + F * r_2, Y * r_2) + (0, K * r_2), \\
\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2) &= (Y * r_1 + F * r_2, Y * r_2) + (M * r_1, 0).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Преобразуем первое из этих выражений. Снова подставим разложение $r_{1,2}$ по базису:

$$
\begin{cases}
\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2)_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} \left(\alpha_{x(yx)^i} + d\beta_{x(yx)^i}\right)(xy)^{i+1} \\
\qquad + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} \alpha_{x(yx)^i}(yx)^{i+1} \\
\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha_{(xy)^i} + \alpha_{(yx)^i} + d\beta_{(yx)^i}\right) y(xy)^i \\
\qquad + d\left(\left(\beta_{x(yx)^{k-1}} + d\beta_y\right)(xy)^k + \beta_1 y\right) \\
\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2)_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} \beta_{x(yx)^i}\left((xy)^{i+1} + (yx)^{i+1}\right) \\
\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_{(xy)^i} + \beta_{(yx)^i}\right) y(xy)^i \\
\qquad + d\left(\beta_1 x(yx)^{k-1} + \beta_y (xy)^k\right)
\end{cases}
\tag{21}
$$

4.6.1. $\operatorname{Ker}\delta_{\mathcal{X}\bullet}^{4+2s}$

Приравнивая оба уравнения в 21 к нулю, приходим к системе:

$$\begin{cases}\begin{cases}\alpha_{x(yx)^i}=0, & i=0\dots k-2,\\ \alpha_{(xy)^i}+\alpha_{(yx)^i}+d\beta_{(yx)^i}=0, & i=1\dots k-1,\\ d\beta_{x(yx)^{k-1}}=0, & \\ d\beta_1, & \end{cases}\\ \begin{cases}\beta_{x(yx)^i}=0, & i=0\dots k-2,\\ \beta_{(xy)^i}+\beta_{(yx)^i}=0, & i=1\dots k-1,\\ d\beta_y=0. & \end{cases}\end{cases} \tag{22}$$

Случай $d=0$ разобран в [7]. В случае $d\neq 0$ базис $\operatorname{Ker}\delta_{\mathcal{X}\bullet}^{4+2s}$ задаётся следующими векторами:

$$\begin{aligned} &(1,0)\,,\\ &\big(y(xy)^i,0\big)\,, \quad i=0\dots k-1,\\ &\big(x(yx)^{k-1},0\big)\,,\\ &\big((xy)^i+(yx)^i,0\big)\,, \quad i=1\dots k-1,\\ &\big(d(xy)^i,(xy)^i+(yx)^i\big)\,, \quad i=1\dots k-1,\\ &\big((xy)^k,0\big)\,,\\ &\big(0,y(xy)^i\big)\,, \quad i=1\dots k-1,\\ &\big(0,(xy)^k\big)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

При $d\neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Ker}\delta_{\mathcal{X}\bullet}^{4+2s}=4k+1$.

4.6.2. $\operatorname{Im}\delta_{\mathcal{X}\bullet}^{4+2s}$

Вновь разбираем только случай $d\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\big(x(yx)^{i-1},0\big) &\to \big((xy)^i+(yx)^i,0\big)\,, && i=1\ldots k-1,\\
\big((xy)^i,0\big) &\to \big(y(xy)^i,0\big)\,, && i=1\ldots k-1,\\
(0,1) &\to \big(dy,dx(yx)^{k-1}\big)\,, &&\\
\big(0,y+dx(yx)^{k-1}\big) &\to \big(0,d(xy)^k\big)\,, &&\\
\big(0,x(yx)^{i-1}\big) &\to \big(d(xy)^i,(xy)^i+(yx)^i\big)\,, && i=1\ldots k-1,\\
\big(0,x(yx)^{k-1}\big) &\to \big(d(xy)^k,0\big)\,, &&\\
\big(0,(xy)^i\big) &\to \big(0,y(xy)^i\big)\,, && i=1\ldots k-1.
\end{aligned}
$$

При $d\neq 0$ $\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im}\delta^{4+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}=4k-1$.

4.7. $\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$

Чтобы получить систему для $\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1,r_2)$, аналогичную 21, нужно перенести слагаемые из последней строки второго уравнения в 21 в первое уравнение с заменой $\beta_\star$ на $\alpha_\star$. После этого система уравнений для $\operatorname{Ker}\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$, базис $\operatorname{Ker}\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ и базис $\operatorname{Im}\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ полностью повторяют соответствующие объекты в разделе про δ^3, за исключением того, что векторы в $\operatorname{Im}\delta^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$ имеют размерность 2, а не 3 (у векторов из $\operatorname{Im}\delta^3$ отсекается третья компонента, которая для них всегда нулевая).

4.8. $H^n(\mathcal{X}^\bullet)$

Случай $d=0$ разобран в [7], и тогда $\forall n\geq 4$: $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)=4$. В случае $d\neq 0$ прямым вычислением получаем:

- базис $H^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ состоит из классов векторов $(1,0)$ и $\big(0,(xy)^k\big)$ и имеет размерность 2;
- базис $H^{5+2s}_{\mathcal{X}^\bullet}$, $s\geq 0$ состоит из классов векторов (dy,y) и $\big(x(yx)^{k-1},0\big)$ и имеет размерность 2;
- базис $H^{4+2(s+1)}_{\mathcal{X}^\bullet}$, $s\geq 0$ совпадает с базисом $H^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ и имеет размерность 2.

4.9. $\mathrm{HH}^n(R)$

Повторим доказательство предложения 3.16 из [7] для случая произвольных c и d. По построению комплексов $Q_\bullet$ и $\mathcal{X}_\bullet$ очевидно, что имеет место следующая расщепляющаяся короткая точная последовательность цепных комплексов и цепных преобразований i и π (предложение 2.11 в [7]):

$$0 \to \mathcal{X}_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0.$$

Следовательно, имеется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_\bullet, R) = \mathcal{X}^\bullet \to 0.$$

Эта последовательность приводит к длинной точной когомологической последовательности (см. [10], II.§4):

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots \tag{24}$$

Покажем, что при $n \geq 3$ связывающие гомоморфизмы Δ^n в 24 нулевые. Если это так, то 24 распадётся на набор из расщепляющихся коротких точных последовательностей:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{HH}^0(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^4(R) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) \to 0, \\ 0 \to \mathrm{HH}^1(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^5(R) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet) \to 0, \\ \cdots \end{gathered}$$

откуда будет следовать, что при $n \geq 4$:

$$\mathrm{HH}^n(R) \simeq \mathrm{HH}^{n-4}(R) \oplus \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet).$$

Рассмотрим следующую диаграмму, возникающую при построении связывающего гомоморфизма:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, dashed, "\delta^{n-5}"] & \vdots \arrow[d, dashed, "\delta^{n-1}"] & \vdots \arrow[d, dashed, "\delta^{n-1}_{\mathcal{X}_\bullet}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "\delta^{n-4}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\delta^n"] & \mathcal{X}^n \arrow[r] \arrow[d, "\delta^n_{\mathcal{X}_\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, dashed, "\delta^{n-3}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, dashed, "\delta^{n+1}"] & \mathcal{X}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\delta^{n+1}_{\mathcal{X}_\bullet}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Пусть при $n \geq 3$ $f = (r_1, r_2) \in \mathcal{X}^n$ — некоторый n-коцикл, то есть $\delta^n_{\mathcal{X}_\bullet}(f) = 0$. Построим некоторый прообраз f в $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$, а именно, доопределим отображение f нулями на дополнительных прямых слагаемых к X_n в Q_n: $\widetilde{f} = (r_1, r_2, 0, \ldots, 0)$; иными словами, положим $\widetilde{f} = f \circ \nu$, где $\nu\colon Q_n \to X_n$ — проекция на соответствующее прямое слагаемое. Ясно, что $i^*(\widetilde{f}) = f$.

Общий вид гомоморфизмов d_n при $n \geq 5$ указан в 2. Легко видеть, что поскольку f — коцикл, при $n \geq 5$ $\delta^n(\widetilde{f}) = 0$. При $n = 3, 4$ прямыми вычислениями получаем аналогичный результат. Следовательно, при $n \geq 3$ $\Delta^n(f) = 0$. ■

Подведём итоги и выпишем размерность $\mathrm{HH}^n(R)$ в общем случае.

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k + \theta_0^{k,d} + \theta^{k,d} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4, \\ k + \theta_1^{k,d} + \theta^{k,d} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4, \\ k + \theta_2^{k,d} + \theta^{k,d} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 4, \\ k + \theta_3^{k,d} + \theta^{k,d} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, & \text{если } n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

где $\left(\theta^{k,d}, \theta_0^{k,d}, \theta_1^{k,d}, \theta_2^{k,d}, \theta_3^{k,d}\right)$ указаны в следующей таблице:

	$[k \bmod 2] = 0$	$[k \bmod 2] = 1$
$d \neq 0$	$(2, 3, 5, 5, 4)$	$(2, 3, 4, 4, 4)$
$d = 0$	$(8, 3, 6, 7, 8)$	$(8, 3, 5, 6, 8)$

Таблица 9: $\left(\theta^{k,d}, \theta_0^{k,d}, \theta_1^{k,d}, \theta_2^{k,d}, \theta_3^{k,d}\right)$

Напомним ещё раз, что здесь рассматривается случай, когда c и d не равны нулю одновременно; аналогичные формулы для случая равенства нулю указаны в следствии 3.18 в [7].

Отметим, что здесь для упрощения вычислений также применялась уже упомянутая программа [9]. Кроме того, в частных случаях при $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, $k = 2, 3, 4$, $(c, d) = (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, $n = 0 \ldots 7$ была произведена независимая проверка размерностей групп когомологий в системе GAP [4] посредством пакета QPA [5]. Соответствующий код также можно найти в [9].

5. Заключение

В работе была вычислена минимальная бимодульная резольвента для алгебр из серии $SD(1\mathcal{A})^{k,2}(c,d)$, а также размерности и базисы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ для всех n. Результаты получены для произвольного алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ характеристики 2. Для упрощения вычислений была написана вспомогательная программа [9], применение которой совместно с пакетом QPA [5] существенно сократит время, необходимое для проведения аналогичной работы в будущем.

Список литературы

[1] Erdmann K. Algebras and semidihedral defect groups, I // Proc. London Math. Soc. — 1988. — Vol. 57, no. 1. — P. 109–150.

[2] Erdmann K. Algebras and semidihedral defect groups, II // Proc. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 60, no. 1. — P. 123–165.

[3] Erdmann K. Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras. Lecture Notes in Mathematics no. no. 1428. — Springer-Verlag, 1990. — ISBN: 9783540527091.

[4] The GAP Group. — GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.7, 2017. — Access mode: http://www.gap-system.org.

[5] The QPA-team. — QPA - Quivers, path algebras and representations - a GAP package, Version 1.25, 2016. — Access mode: https://folk.ntnu.no/oyvinso/QPA/.

[6] SymPy: symbolic computing in Python / Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki et al. // PeerJ Computer Science. — 2017. — Jan. — Vol. 3. — P. e103. — Access mode: https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103.

[7] А.И. Генералов. Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. I. Групповые алгебры полудиэдральных групп // Алгебра и анализ. — 2009. — Vol. 21, no. 2. — P. 1–51.

[8] А.И. Генералов. Когомологии алгебр полудиэдрального типа. VII. Локальные алгебры // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Vol. 365. — P. 130–142.

[9] Д.А. Никулин. symbolic-computations // Github. — 2017. — Access mode: https://github.com/Pastafarianist/symbolic-computations.

[10] Маклейн С. Гомология. — Мир, 1966.

[11] Ю.В. Волков А.И. Генералов С.О. Иванов. О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Vol. 375. — P. 61–70.